Helsingin yliopisto, Itä-Suomen yliopisto, Jyväskylän yliopisto, Oulun yliopisto, Tampereen yliopisto ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe (Ratkaisut ja pisteytys)
31.5.2010

Kustakin tehtävästä saa maksimissaan 12 pistettä!

1. Laske suoran $x = y - 2$ ja käyrän $x^2 = -1 + 2y$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala.

Ratkaisu. Kyseessä on suoran $y = x+2$ ja paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala *(2p)*.

Suoran $y = x + 2$ ja paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ leikkauspisteiden x-koordinaateiksi saadaan

$$x + 2 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2} \iff \tfrac{1}{2}x^2 - x - \tfrac{3}{2} = 0 \iff x = -1 \text{ tai } x = 3. \quad \textit{(2p)}$$

Välillä $[-1, 3]$ suora $y = x+2$ on paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ yläpuolella (perusteluksi riittää laskea arvot jossakin avoimen välin $]-1, 3[$ pisteessä) (väite *(1p)*; perustelu *(1p)*).

Tarkasteltavan alueen pinta-ala saadaan kun suoran $y = x + 2$ ja x-akselin väliin arvoilla $-1 \le x \le 3$ jäävän alueen pinta-alasta vähennetään paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ja x-akselin väliin arvoilla $-1 \le x \le 3$ jäävän alueen pinta-ala. Siis kysytty pinta-ala A saadaan erotuksena

$$A = \int_{-1}^{3} x + 2\, dx - \int_{-1}^{3} \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\, dx. \quad \textit{(2p)}$$

Kummankin integraalin laskeminen oikein (vastaukset 12 ja $\frac{20}{3}$) antaa erikseen *(2p)* (integraalifunktiot kumpikin *(1p)*). Vastaukseksi saadaan $A = \frac{16}{3}$.

Tapa 2: Kysytty pinta-ala on sama kuin ei-negatiivisen erotusfunktion

$$f(x) = x + 2 - \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}x^2 + x + \tfrac{3}{2}$$

ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala A. Siis

$$A = \int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \int_{-1}^{3} -\tfrac{1}{2}x^2 + x + \tfrac{3}{2}\, dx. \quad \textit{(2p)}$$

Oikea integraalifunktio *(2p)* ja oikea vastaus $A = \frac{16}{3}$ *(2p)*.

2. Ratkaise epäyhtälö $(2x - 1)\sqrt{3x} < |2x - 1|$.

Ratkaisu. On oltava $x \ge 0$, jotta neliöjuurilauseke on määritelty *(1p)*.

Toisaalta $2x - 1 \ge 0$ jos ja vain jos $x \ge \frac{1}{2}$, joten

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{kun} \quad x \ge \frac{1}{2} \\ -(2x - 1), & \text{kun} \quad x < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \textit{(2p)}$$

Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen (kummankin ratkaiseminen antaa erikseen *(4p)*):

(1) Oletetaan, että $x \geq \frac{1}{2}$: Tällöin epäyhtälö on muotoa

$$(2x-1)\sqrt{3x} < 2x-1.$$

Voidaan siis olettaa, että $x \neq \frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{2}$ ei ole epäyhtälön ratkaisu *(1p)*.

Siten jakamalla puolittain luvulla $2x-1$ saadaan ekvivalentisti $\sqrt{3x} < 1$. *(1p)*

Edellinen epäyhtälö voidaan ekvivalentisti korottaa puolittain toiseen, jolloin saadaan $3x < 1$ eli $x < \frac{1}{3}$. *(1p)*

Yhdistämällä ehdot $x > \frac{1}{2}$ ja $x < \frac{1}{3}$ todetaan, että tapauksessa (1) epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja *(1p)*.

(2) Oletetaan, että $0 \leq x < \frac{1}{2}$: Nyt $x = 0$ on selvästi ratkaisu *(1p)*.

Tapauksessa $0 < x < \frac{1}{2}$ pätee $2x-1 < 0$ ja $(2x-1)\sqrt{3x} < 0$ *(2p)*. Tällöin epäyhtälö pätee, koska itseisarvo on ei-negatiivinen. *(1p)*

(3) Yhdistämällä tapaukset (1) ja (2) saadaan ratkaisujoukoksi $0 \leq x < \frac{1}{2}$ *(1p)*.

Huom! Luonnollisesti (2) voidaan ratkaista samaan tapaan kuin (1). Tällöin pisteytys on analoginen kohdan (1) kanssa.

3. Seitsemän biljardipalloa on numeroitu $1-7$.

(a) Palloista valitaan umpimähkään kaksi. Millä todennäköisyydellä nämä pallot ovat numerot 1 ja 2?

(b) Pallot laitetaan satunnaisella tavalla riviin biljardipöydän laitaa vasten. Millä todennäköisyydellä numerot 1 ja 2 ovat vierekkäin?

Ratkaisu. (a) Ensimmäinen pallo voidaan valita seitsemällä eri tavalla ja toinen kuudella eri tavalla. Ensimmäistä palloa valittaessa on kaksi suotuisaa vaihtoehtoa ja toista valittaessa yksi vaihtoehto. Kysytty todennäköisyys on siten

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}.$$

Toisin: Binomikerroin $\binom{7}{2}$ kertoo sen, kuinka monella tavalla kaksi palloa voidaan valita seitsemästä. Eri valintavaihtoehtoja on siten

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21,$$

joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{21}$.

Arvostelusta:

- Nimittäjä 42 tai 21 binomikerrointa käyttäen antaa *(4p)*.
- Vastaus $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$ antaa *(2p)*.
- Jos vastaus on oikein, mutta laskuvirhe lopputuloksen sievennyksessä, vähennetään *(1p)*.

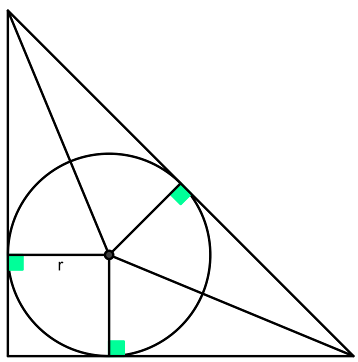
(b) Seitsemän palloa voidaan asettaa riviin $7!$ eri tavalla *(2p)*. Numerot 1 ja 2 voivat sijaita vierekkäin kuudessa paikassa riviä *(1p)*, kussakin paikassa kahdessa eri järjestyksessä *(1p)*. Lisäksi kutakin pallojen 1 ja 2 vierekkäistä sijaintia kohti loput viisi palloa voidaan valita $5!$ eri tavalla *(1p)*. Siten kysytty todennäköisyys on

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 5!}{7!} = \frac{2}{7}. \quad \textit{(1p)}$$

Jos vastaus on oikein, mutta laskuvirhe lopputuloksen sievennyksessä, vähennetään *(1p)*.

4. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota k, jonka kateettien pituudet ovat 1. Pidetään tunnettuna, että kolmion k kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä, joka on kolmion k sisään piirretyn ympyrän c keskipiste. Piirrä kuva ja osoita, että ympyrän c säde on $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ratkaisu. Olkoon r ympyrän c säde. Pythagoraan lauseen nojalla kolmion k hypotenuusan pituus on $\sqrt{2}$.



Tapa 1: Kolmio k jakautuu r-sivuiseen neliöön ja neljään yhtenevään kolmioon. Neljän kolmion yhtenevyys seuraa siitä, että vastinkulmat ovat yhtä suuret ja pienimmän kulman vastaisen sivun pituus on kaikilla r. Yhtenevissä kolmioissa pidemmän kateetin pituus on toisaalta $1 - r$, toisaalta $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Saadaan ehto

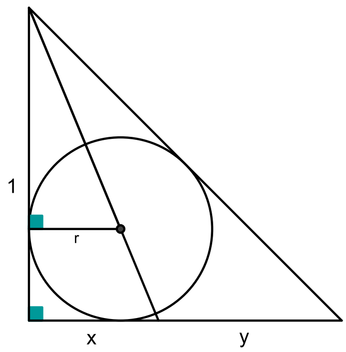
$$1 - r = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

josta ratkaisuksi $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tapa 2: Voidaan myös käyttää tietoa, että kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Näin ollen kolmion k terävästä kulmasta piirretty kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun (jonka pituus on 1) suhteessa $x : y = 1 : \sqrt{2}$.

Siis $x + y = 1$ ja $y = x\sqrt{2}$, josta saadaan ratkaistuksi $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden (vastinkulmat yhtä suuret) perusteella

$$\frac{r}{1 - r} = \frac{x}{1} = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{1}.$$



Tästä saadaan $r = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$. Lopuksi todetaan, että

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tapa 3: Kolmion k pinta-ala $A_k = \frac{1}{2}$ saadaan r-säteisen neliön ja neljän yhtenevän kolmion pinta-alojen summana. Siis kunkin neljän pikkukolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}r(1-r)$, joten

$$A_k = \frac{1}{2} = r^2 + 2r(1-r).$$

Tästä ehdosta päädytään yhtälöön

$$r^2 - 2r + \frac{1}{2} = 0,$$

jonka ratkaisuiksi saadaan

$$r = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tässä $r = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ei kelpaa ratkaisuksi, joten välttämättä $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tapa 4: Pytagoraan lauseen nojalla kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{2}$. Tällöin siis $\sqrt{2}/2$ ja r ovat sellaisen suorakulmaisen kolmion kateetit, jonka hypotenuusan ja pidemmän kateetin välinen kulma on $45°/2$. Näin ollen $\tan 22,5° = \frac{r}{\sqrt{2}/2}$, mistä $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tan 22,5°$. Arvo $\tan 22,5°$ voidaan määrittää esimerkiksi kaavan $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ perusteella, jolloin $\tan 22,5° = \frac{1-\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Tällöin $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Arvostelu:

- Pelkkä kuva *max (2p)*: Kuvassa *(1p)* siitä, että ympyrä sivuaa kutakin kolmion sivua; *(1p)* siitä, että c:n keskipisteestä on piirretty sivuille kohtisuorat.
- Hypotenuusan pituuden laskeminen *(1p)*.
- Osapisteitä saa kolmioiden yhtenevyyden toteamisesta *(1p)* ja yhtenevyyden perustelusta *(1p)*. Jos ratkaisu oikein, mutta yhtenevyyden toteaminen ja/tai perustelu puuttuu, vähennetään *max (2p)*.
- Jos tavassa 4 yhtäsuuruutta $\tan 22,5° = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ei ole perusteltu, *max (9p)*.

5. Tason pisteen P sijainti määräytyy yhtälöstä $P = (t^2 - 2t, t^4)$, missä t on reaaliluku.

(a) Määrää ne t:n arvot, joilla pisteiden P ja $Q = (0, 1)$ kautta kulkeva suora on jommankumman koordinaattiakselin suuntainen.

(b) Tarkastellaan positiivisen x-akselin ja pisteen P paikkavektorin

$$\bar{r} = (t^2 - 2t)\bar{i} + t^4\bar{j}$$

välistä kulmaa vastapäivään. Millä t:n arvolla kyseinen kulma saa pienimmän arvonsa joukossa $\{ t \in \mathbf{R} : t > 0 \}$?

Ratkaisu. (a) Pisteiden P ja Q kautta kulkeva suora on x-akselin suuntainen silloin kun $t^4 = 1$ eli silloin kun $t = \pm 1$ *(2p)*. Arvoa $t = 1$ vastaa piste $P = (-1, 1) \neq Q$ ja arvoa $t = -1$ vastaa piste $P = (3, 1) \neq Q$, joten kysytty suora on määritelty kummassakin tapauksessa *(1p)*.

Pisteiden P ja Q kautta kulkeva suora on y-akselin suuntainen silloin kun $t^2 - 2t = 0$ eli silloin kun $t = 0$ tai $t = 2$ *(2p)*. Myös tässä tapauksessa kysytty suora on määritelty kummassakin tapauksessa, sillä arvoa $t = 0$ vastaa piste $P = (0, 0) \neq Q$ ja arvoa $t = 2$ vastaa piste $P = (0, 8) \neq Q$ *(1p)*.

(b) Kulman pienin arvo saadaan silloin kun P on ensimmäisessä neljänneksessä, ts.

$$t^2 - 2t > 0 \quad \text{ja} \quad t > 0.$$

Riittää siis minimoida kulman arvo ehdolla $t > 2$ *(1p)*. Tässä tapauksessa kulma saa pienimmän arvonsa täsmälleen silloin, kun kulman tangentti saa pienimmän arvonsa *(1p)*, joten voidaan minimoida kulman tangentti eli funktio

$$f(t) = \frac{t^4}{t^2 - 2t}, \quad \textit{(1p)}$$

kun $t > 2$. Funktion f derivaataksi saadaan

$$f'(t) = \frac{4t^3(t^2 - 2t) - (2t - 2)t^4}{(t^2 - 2t)^2} = \frac{2t^5 - 6t^4}{(t^2 - 2t)^2} = \frac{2t^4(t - 3)}{(t^2 - 2t)^2}, \quad \textit{(1p)}$$

joten derivaatan merkki vaihtuu pisteessä $t = 3$ negatiivisesta positiiviseksi *(1p)*. Siis funktiolla f on lokaali minimi pisteessä $t = 3$ ja tämä on pienin arvo joukossa $t > 2$ *(1p)*.

Huom! Voidaan myös minimoida kulman sini, jolloin pisteytys vastaavasti.