

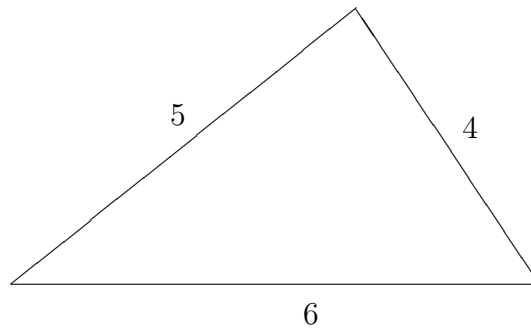
Helsingin, Joensuun, Jyväskylän, Oulun ja Turun yliopisto Matematiikan valintakoe 1.6.2009

1. A ostaa omakotitalon. Saadakseen kauppaan tarvittavat rahat hän myy kerrostalohuoneistonsa, josta hän saa 40 % ostettavan talon hinnasta. Myynnistä saamallaan tuloilla hän maksaa pois autolainansa 16 000 euroa ja kiinteistönvälittäjän palkkion 5 % myydyn huoneiston hinnasta. Ostamiseen A käyttää jäljelle jäävät rahat sekä pankkilainan, jota hänelle on myönnetty 70 % ostettavan talon hinnasta. Kuinka paljon A :n ostama omakotitalo maksoi?

2. Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{|x^2 - 2x - 3|}{2x - 3} \leq 1.$$

3. Laske käyrien $y = x^2 - 6x + 11$ ja $y = -x^2 + 8x - 13$ rajoittaman alueen pinta-ala.
4. Laatikossa on 8 mustaa ja 8 valkoista palloa. Esiin nostetaan kolme palloa palauttamatta niitä laatikkoon. Millä todennäköisyydellä nostettujen pallojen joukossa on sekä musta että valkoinen pallo?
5. Kolmion sivujen pituudet ovat 4, 5 ja 6. Laske kolmion pinta-alan tarkka arvo.



Mallivastaukset

1. Olkoon x omakotitalon hinta. Tällöin A :n asunnostaan saama hinta on $\frac{40}{100}x$, lainan määrä $\frac{70}{100}x$ ja välityspalkkio $\frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100}x = \frac{2}{100}x$ (4p). Yhtälöksi saadaan

$$\frac{40}{100}x + \frac{70}{100}x - \frac{2}{100}x - 16000 = x,$$

(4p) mikä sievenee muotoon

$$\frac{8}{100}x = 16000,$$

ja ratkaisuksi saadaan $x = 200000$ (4p).

Arvaus tai kokeilu ilman yhtälöä: 0p.

2. Nollakohtat etsimällä selviää, että vasemman puolen nimittäjä on negatiivinen kun $x < \frac{3}{2}$ ja positiivinen kun $x > \frac{3}{2}$ ja osoittaja ilman itseisarvoja negatiivinen välillä $(-1, 3)$ (4p).

Jaetaan reaaliakseli nollakohtien avulla neljään väliin:

(a) $x \leq -1$, jolloin epäyhtälö saa muodon

$$x^2 - 2x - 3 \geq 2x - 3 \iff x^2 - 4x \geq 0 \iff x - 4 \leq 0 \iff x \leq 4,$$

epäyhtälö pätee siis koko välillä $(-\infty, -1]$.

(b) $-1 < x < \frac{3}{2}$, jolloin epäyhtälö saa muodon

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 2x - 3 \iff -x^2 \geq -6 \iff |x| \leq \sqrt{6}.$$

Koska $2 < \sqrt{6} < 3$, pätee epäyhtälö myös välillä $(-1, \frac{3}{2})$.

(c) $\frac{3}{2} < x \leq 3$, mikä johtaa muotoon

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 2x - 3 \iff -x^2 \leq -6 \iff |x| \geq \sqrt{6}.$$

Ratkaisujoukon ja tarkasteluvälin leikkaus on $[\sqrt{6}, 3]$.

(d) $x > 3$. Epäyhtälö saa muodon

$$x^2 - 2x - 3 \leq 2x - 3 \iff x^2 - 4x \leq 0 \iff x - 4 \leq 0 \iff x \leq 4$$

jolloin siis ratkaisujoukon ja tarkasteluvälin leikkaus on $(3, 4]$. (a) &

(b) 2p, (c) 2p, (d) 2p.

Osaratkaisut yhdistämällä saadaan ratkaisujoukoksi $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [\sqrt{6}, 4]$ (2p).

Nimittäjän kertominen pois sen merkistä piittaamatta: max 6p

3. Käyristä ensimmäinen on ylöspäin ja jälkimmäinen alaspäin aukeava paraabeli. Leikkauspisteiden x -koordinaatit saadaan selville ratkaisemalla yhtälö $x^2 - 6x + 11 = -x^2 + 8x - 13 \iff x^2 - 7x + 12 = 0 \iff x \in \{3, 4\}$ (2p).

Kysytty ala saadaan täten integraalina

$$\begin{aligned} & \int_3^4 ((-x^2 + 8x - 13) - (x^2 - 6x + 11)) dx \quad (4p) \\ &= \int_3^4 (-2x^2 + 14x - 24) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 24x \right]_3^4 \quad (3p) \\ &= -\frac{2}{3}(4^3 - 3^3) + 7(4^2 - 3^2) - 24(4 - 3) = \frac{1}{3}. \quad (3p) \end{aligned}$$

4. Ratkaisu 1: Ensiksi voidaan todeta, että

$$P(\text{erivärisiä palloja}) = 1 - P(\text{samanväriset pallot})$$

(2p) ja sitten

$$P(\text{samanväriset pallot}) = P(3 \text{ valkoista palloa}) + P(3 \text{ mustaa palloa}).$$

(2p) Edelleen,

$$P(3 \text{ valkoista palloa}) = P(3 \text{ mustaa palloa})$$

(2p) ja

$$P(3 \text{ valkoista palloa}) = \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{10}$$

(4p) Kokoamalla kaikki yhteen nähdään, että kysytty todennäköisyys on

$$1 - \frac{2}{10} = 80\%$$

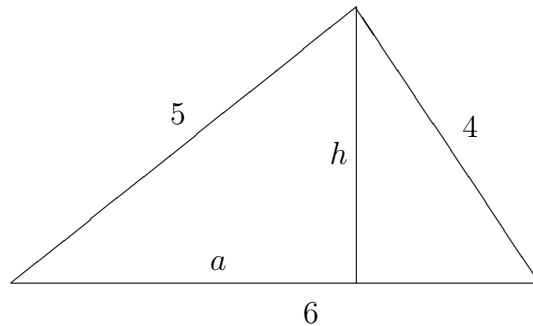
(2p).

Ratkaisu 2:

$$\begin{aligned} P &= P((2 \text{ mustaa ja } 1 \text{ valkoinen}) \text{ tai } (1 \text{ musta ja } 2 \text{ valkoista})) \\ & \quad (4p) \\ &= P(MMV) + P(MVM) + P(VMM) \\ &+ P(VVM) + P(VMV) + P(MVV) \\ & \quad (4p) \\ &= \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \\ &+ \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \\ &= 6 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{5}. \\ & \quad (4p) \end{aligned}$$

5. Ratkaisu 1: Käytetään korkeuden laskemiseksi seuraavia merkintöjä:

Tällöin $a^2 + h^2 = 5^2$ ja $(6 - a)^2 + h^2 = 4^2$ (yhtälöt h :n määrittämiseksi 5p). Jälkimmäinen yhtälö sievenee muotoon $-12a + a^2 + h^2 = -20$ ja



ensimmäisestä saadaan $a = \sqrt{25 - h^2}$. Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön saadaan

$$-12\sqrt{25 - h^2} + 25 - h^2 + h^2 = -20,$$

mikä edelleen sievenee muotoon

$$\sqrt{25 - h^2} = \frac{15}{4}$$

Tällöin siis $25 - h^2 = (\frac{15}{4})^2$, mistä $h^2 = 25 - \frac{225}{16} = \frac{175}{16}$ ja $h = \sqrt{\frac{175}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{7}$ (h ratkaistu oikein 5p). Pinta-ala on siis $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{7} = \frac{15}{4}\sqrt{7}$ (2p).

Ratkaisu 2: Merkitään α :lla 5- ja 4-pituisten sivujen välistä kulmaa. Tällöin kosinilauseen mukaan on $6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \alpha$ (4p), josta $\cos \alpha = \frac{1}{8}$. Tällöin $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\frac{1}{8})^2}$, joten $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (4p). Kysytty pinta-ala on siis $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$ (4p).

Ratkaisu 3: Kolmion piiri on $4 + 5 + 6 = 15$, joten Heronin kaava antaa pinta-alaksi

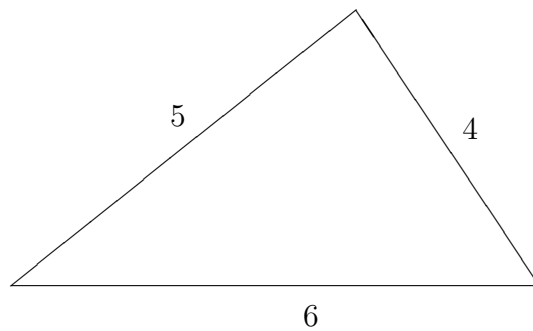
$$\sqrt{\frac{15}{2}(\frac{15}{2} - 4)(\frac{15}{2} - 5)(\frac{15}{2} - 6)} = \frac{1}{4}\sqrt{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{15}{4}\sqrt{7}.$$

Kaavan muistaminen oikein: 9p, laskut 3p. Heronin kaava, jossa piirin puolikkaan sijaan koko piiri: max 3p.

Ratkaisu 4: Kolmion luuleminen kuvan perusteella suorakulmaiseksi ja vastaus $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$, 0p.

Helsingfors, Joensuu, Jyväskylä, Uleåborg och
Åbo universitet
Urvalsprovet i matematik 1.6.2009

1. A köper ett egnahemshus. För att få ihop köpepriset säljer han sin lägenhet i ett våningshus, vilket ger honom 40 % av köpepriset. Av försäljningsinkomsten betalar han sitt billån om 16 000 euro och fastighetsförmedlarens provision á 5 % av den sålda lägenhetens pris. För att köpa huset använder han resten av pengarna och ett banklån som han har fått. Banklånet täcker 70 % av egnahemshusets pris. Hur mycket kostade egnahemshuset?
2. Lös följande olikhet
$$\frac{|x^2 - 2x - 3|}{2x - 3} \leq 1.$$
3. Beräkna ytan som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 6x + 11$ och $y = -x^2 + 8x - 13$.
4. En ask innehåller 8 svarta och 8 vita bollar. Ur asken tas utan återläggning tre bollar. Vad är sannolikheten att det finns både en svart boll och en vit boll bland de tre dragna bollarna?
5. Triangelns sidor är 4, 5 och 6. Beräkna triangelns exakta yta.



Modellsvar

1. Låt x vara egnahemshusets pris. Antag att A:s lägenhets pris är $\frac{40}{100}x$, lånet $\frac{70}{100}x$ och fastighetsförmedlarens provisionen $\frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100}x = \frac{2}{100}x$ (4p). Som ekvation fås

$$\frac{40}{100}x + \frac{70}{100}x - \frac{2}{100}x - 16000 = x,$$

(4p) vilken kan hyfsas till

$$\frac{8}{100}x = 16000,$$

med lösningen $x = 200000$ (4p).

En gissning eller försök utan ekvation: 0p.

2. Vid sökning av nollställena, ser man att nämnaren på vänstra sidan är negativ för $x < \frac{3}{2}$ och positiv för $x > \frac{3}{2}$. Täljaren utan absolutbeloppstecknen är negativ i intervallet $(-1, 3)$ (4p).

Därefter indelas reella axeln i fyra intervall:

(a) $x \leq -1$, tar olikheten formen

$$x^2 - 2x - 3 \geq 2x - 3 \iff x^2 - 4x \geq 0 \iff x - 4 \leq 0 \iff x \leq 4,$$

d.v.s. olikheten gäller i hela intervallet $(-\infty, -1]$.

(b) $-1 < x < \frac{3}{2}$, tar olikheten formen

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 2x - 3 \iff -x^2 \geq -6 \iff |x| \leq \sqrt{6}.$$

Eftersom $2 < \sqrt{6} < 3$, gäller olikheten även i intervallet $(-1, \frac{3}{2})$.

(c) $\frac{3}{2} < x \leq 3$, fås följande villkor

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 2x - 3 \iff -x^2 \leq -6 \iff |x| \geq \sqrt{6}.$$

varvid lösningsmängdens och definitionsmängdens snitt är $[\sqrt{6}, 3]$.

(d) $x > 3$, fås följande olikhet

$$x^2 - 2x - 3 \leq 2x - 3 \iff x^2 - 4x \leq 0 \iff x - 4 \leq 0 \iff x \leq 4$$

varvid lösningsmängdens och definitionsmängdens snitt är $(3, 4]$. (a)

& (b) 2p, (c) 2p, (d) 2p.

Genom att sammanfatta delresultaten a)-d) fås lösningsmängden $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [\sqrt{6}, 4]$ (2p).

Nämnaren multiplicerad utan att tecken har förklarats: max 6p

3. Den första kurvan är en parabel som öppnar uppåt och den andra en parabel som öppnar neråt. Skärningspunkternas x -koordinater fås genom att lösa ekvationen $x^2 - 6x + 11 = -x^2 + 8x - 13 \iff x^2 - 7x + 12 = 0 \iff x \in \{3, 4\}$ (2p).

Den sökta ytan fås från integralen

$$\begin{aligned} & \int_3^4 ((-x^2 + 8x - 13) - (x^2 - 6x + 11)) dx \quad (4p) \\ &= \int_3^4 (-2x^2 + 14x - 24) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 24x \right]_3^4 \quad (3p) \\ &= -\frac{2}{3}(4^3 - 3^3) + 7(4^2 - 3^2) - 24(4 - 3) = \frac{1}{3}. \quad (3p) \end{aligned}$$

4. Lösning 1: Först kan noteras att

$$P(\text{olikfärgade bollar}) = 1 - P(\text{bollarna har samma färg})$$

(2p) och sedan

$$P(\text{bollarna har samma färg}) = P(3 \text{ vita bollar}) + P(3 \text{ svarta bollar}).$$

(2p) Vidare,

$$P(3 \text{ vita bollar}) = P(3 \text{ svarta bollar})$$

(2p) och

$$P(3 \text{ vita bollar}) = \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{10}$$

(4p) Varefter fås att den efterfrågade sannolikheten är

$$1 - \frac{2}{10} = 80\%$$

(2p).

Lösning 2:

$$P = P((2 \text{ svarta och } 1 \text{ vit}) \text{ eller } (1 \text{ svart och } 2 \text{ vita}))$$

(4p)

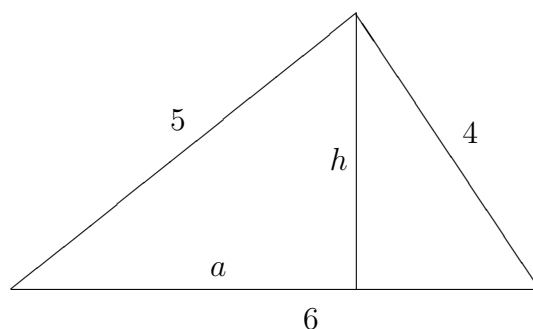
$$\begin{aligned} &= P(SSV) + P(SVS) + P(VSS) \\ &+ P(VVS) + P(VSV) + P(SVV) \end{aligned}$$

(4p)

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \\ &+ \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \\ &= 6 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

(4p)

5. Lösning 1: För beräkning av höjden används följande beteckningar:



Varvid $a^2 + h^2 = 5^2$ och $(6 - a)^2 + h^2 = 4^2$ (ekvationen för att lösa h 5p). Den andra ekvationen kan hyfsas till $-12a + a^2 + h^2 = -20$ och den första ger $a = \sqrt{25 - h^2}$. Genom att substituera detta a i den andra ekvationen fås

$$-12\sqrt{25 - h^2} + 25 - h^2 + h^2 = -20,$$

vilken kan hyfsas till

$$\sqrt{25 - h^2} = \frac{15}{4}$$

d.v.s. $25 - h^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$, som ger $h^2 = 25 - \frac{225}{16} = \frac{175}{16}$ och $h = \sqrt{\frac{175}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{7}$ (h löstes rätt 5p). Varefter ytan kan beräknas $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{7} = \frac{15}{4}\sqrt{7}$ (2p).

Lösning 2: Låt α beteckna vinkeln mellan sidorna med längderna 5 och 4. Då ger cosinussatsen $6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \alpha$ (4p), som ger att $\cos \alpha = \frac{1}{8}$. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2}$, ger att $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (4p). Den eftersökta ytan är därmed $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$ (4p).

Lösning 3: Triangelns perimeter är $4 + 5 + 6 = 15$, Herons formel ger ytan

$$\sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 4\right) \left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 6\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{15}{4} \sqrt{7}$$

Formeln mindes rätt: 9p, talen rätt 3p. Herons formeln med perimeter i stället för semiperimeter: max 3p.

Lösning 4: Ifall triangeln antas vara rätvinklig och svaret är $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$, 0p.

**Helsinki, Joensuu, Jyväskylä, Oulu, and
Turku university
Entrance examination in mathematics 1.6.2009**

1. A is buying a house. To collect the money for the transaction he sells his apartment, which gives him 40% of the house price. He uses a part of this income to pay off his car loan of 16 000 euros and to pay the commission of the estate agent, which is 5% of the sold apartment price. To buy the house A spends the rest of the money and the mortgage, which covers 70% of the house price. How much the house A bought cost?
2. Solve the following inequality:

$$\frac{|x^2 - 2x - 3|}{2x - 3} \leq 1.$$

3. Find the area bounded by the curves $y = x^2 - 6x + 11$ and $y = -x^2 + 8x - 13$.
4. An urn contains 8 black and 8 white balls. Three balls are drawn out without returning them. What is the probability that there is a black and a white ball among the three drawn balls?
5. The sides of the triangle are 4, 5, and 6. Find the exact area of the triangle.

