Helsingin yliopisto, Itä-Suomen yliopisto, Jyväskylän yliopisto, Oulun yliopisto, Tampereen yliopisto ja Turun yliopisto Matematiikan valintakokeen 13.6.2011 ratkaisut

---

1. Oletetaan, että litralla (puhdasta) bensiiniä pääsee x km. Tällöin litralla etanolia pääsisi $\frac{2}{3}x$ km, jos auto toimisi puhtaalla etanolilla. Bensiiniä 10 litrassa polttoainetta E05 on $\frac{95}{100} \cdot 10 = 9\frac{1}{2}$ litraa ja etanolia $\frac{5}{100} \cdot 10 = \frac{1}{2}$ litraa. Saamme yhtälön

$$9\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x = 100,$$

josta saadaan ratkaistua

$$x = \frac{100}{9\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{100}{9\frac{5}{6}}.$$

Olkoon y kysytty 100 km kulutus polttoainetta E10. Tällöin

$$\frac{9}{10}y \cdot x + \frac{1}{10}y \cdot \frac{2}{3}x = 100,$$

josta saadaan ratkaisuksi

$$y = \frac{100}{x\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}\right)} = \frac{9\frac{5}{6}}{\frac{29}{30}} = \frac{30}{29} \cdot \frac{59}{6} = 10\frac{5}{29}.$$

Polttoaineiden E05 ja E10 energiasisältöjen suhde on $\left(10\frac{5}{29}\right)/10 = 1\frac{1}{58}$. Vastaava hintasuhde on suurempi, $\frac{165}{160} = 1\frac{5}{160} = 1\frac{1}{32}$, joten on kalliimpaa ajaa E05:llä.

Arvosteluohje: Kummastakin yhtälöstä 3 pistettä; ensimmäisen yhtälön ratkaisusta 1 p. ja toisen 2 p. Toisesta kysymyksestä yhteensä 3 pistettä: 1 p. suhteiden muodostamisesta, 1 p. niiden oikeasta sieventämisestä ja 1 p. oikeasta päätelmästä. Jos ratkaisu ensimmäiseen kysymykseen on oikeaa suuruusluokkaa mutta väärin ja toinen kysymys ratkaistu oikein väärällä luvulla, voidaan toisesta osasta antaa täydet 3 pistettä, ellei väärän luvun käyttö oleellisesti helpota ratkaisua.

Toinen ratkaisu: Merkitään kirjaimella a bensiinin energiasisältöä litraa kohden. Tällöin kymmenestä litrasta polttoainetta E05 saatava energiasisältö on

$$\frac{95}{100} \cdot 10 \cdot a + \frac{5}{100} \cdot 10 \cdot \frac{2}{3}a.$$

Vastaavasti sadalla kilometrillä kulutettavan polttoaineen E10 energiasisältö on

$$\frac{90}{100} \cdot x \cdot a + \frac{10}{100} \cdot x \cdot \frac{2}{3}a,$$

missä x on tarvittava litramäärä. Näiden energiasisältöjen täytyy olla yhtä suuret, mistä saadaan yhtälö, josta x voidaan ratkaista (a supistuu pois).

Kun tiedetään polttoaineiden hinnat litraa kohti ja kulutus sadalle kilometrille, voidaan laskea polttoainekulut sadalle kilometrille kertolaskuilla. Käytettäessä polttoainetta E05 kulut ovat

$10 \cdot 1{,}65 = 16{,}50$ euroa ja käytettäessä polttoainetta E10 ne ovat $10\frac{5}{29} \cdot 1{,}60 = 16\frac{8}{29}$ euroa, mistä on helppo nähdä, että polttoaineen E10 käyttö on edullisempaa.

Arvosteluohje: Yhtälöstä voidaan antaa 6 p. ja sen ratkaisusta 3 p. Jos bensiinin energiasisältö litraa kohti (merkittu a:lla) ei ole mukana eli tehtävää ei ole ratkaistu yleisessä tapauksessa, vähennetään 2 pistettä. Toisen kysymyksen ratkaisussa voidaan antaa oikein lasketuista kuluista 1 p./polttoaine ja 1 p. oikeasta päätelmästä.

Kolmas ratkaisu tehtävän ensimmäiseen kysymykseen: Polttoaineen E05 energiasisältö suhteessa bensiinin energiasisältöön on $\frac{95}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{295}{300}$ ja polttoaineen E10 suhteellinen energiasisältö $\frac{90}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{290}{300}$. Tästä saadaan laskettua polttoaineiden E05 ja E10 energiasisältöjen suhde $\frac{295}{290}$ ja edelleen polttoaineen E10 kulutus $10 \cdot \frac{295}{290} = 10\frac{5}{29}$.

Arvosteluohje: Kaksi pistettä kunkin suhteen määrittämisestä ja johdonmukaisesta käyttämisestä. Suhteen käänteisluvun käytöstä voidaan vastaavasti sakottaa kaksi pistettä. Tämän lisäksi annetaan kolme pistettä oikeista laskutoimituksista.

(Huom. Todellisuudessa etanolin prosenttimäärät ovat enimmäisarvoja. Energiasuhde $2/3$ on likiarvo. Ks. lisätietoja www.motiva.fi.)

2. **a)** On oltava $x > 3$, jotta $\sqrt{x-3}$ on määritelty ja $\neq 0$ [1 p.]. Kertomalla puolittain luvulla $\sqrt{x-3}$, joka on positiivinen [1 p.], epäyhtälö saadaan muotoon $\sqrt{x+2}\sqrt{x-3} < x-1$ [1 p.]. Koska $x-1$ on positiivinen, kun $x > 3$ [1 p.], epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön, jolloin se saadaan yhtäpitävään muotoon $(x+2)(x-3) = x^2-x-6 < (x-1)^2 = x^2-2x+1$ [1 p.]. Lisäämällä puolittain $-x^2+x$ tästä saadaan epäyhtälö $-6 < -x+1$, jonka ratkaisu on $x < 7$ [1 p.].

Alkuperäisen epäyhtälön ratkaisuksi saadaan siis $3 < x < 7$. [Jos ratkaisuksi ilmoitetaan $x < 7$, vaikka ehto $x > 3$ olisikin todettu, vähennetään 1 p.]

Toinen tapa: Todetaan ehto $x > 3$, kuten yllä [1 p.]. Siirtämällä kaikki termit vasemmalle puolelle ja laventamalla samannimisiksi saadaan alkuperäinen epäyhtälö muotoon

$$\frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-3}-(x-1)}{\sqrt{x-3}} < 0. \qquad [1 \text{ p.}]$$

Koska nimittäjä $\sqrt{x-3}$ on positiivinen [1 p.], tämä saadaan yhtäpitävän muotoon $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3} - (x-1) < 0$, ja edelleen muotoon $\sqrt{x+2}\sqrt{x-3} < (x-1)$. Loppu menee kuten ensimmäisessä ratkaisutavassa.

b) Todetaan aluksi, että

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{kun } x < 1, \end{cases} \qquad [1 \text{ p.}]$$

ja

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \geq -\frac{1}{2}, \\ -2x-1, & \text{kun } x < -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad [1 \text{ p.}]$$

Jaetaan tarkastelu vastaaviin tapauksiin:

(1) Oletetaan ensin, että $x < -\frac{1}{2}$. Tällöin epäyhtälö saa muodon $-x+1 < -2x-1$, josta lisäämällä puolittain $2x-1$ saadaan ratkaisuksi $x < -2$ [1 p.].

(2) Oletetaan sitten, että $\frac{1}{2} \leq x < 1$. Tällöin epäyhtälö saa muodon $-x + 1 < 2x + 1$, josta lisäämällä puolittain $x - 1$ saadaan $0 < 3x$, jonka ratkaisu on $x > 0$ [1 p.].

(3) Oletetaan lopuksi, että $x \geq 1$. Tällöin epäyhtälö saa muodon $x - 1 < 2x + 1$, josta lisäämällä puolittain $-x - 1$ saadaan ratkaisuksi $x > -2$ [1 p.].

Yhdistämällä tapaukset (1), (2) ja (3) nähdään, että alkuperäinen epäyhtälö pätee, kun $x < -2$ tai $x > 0$ [1 p.].

Toinen tapa: Koska molemmat puolet ovat ei-negatiivisia [1 p.], epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön, jolloin saadaan $|x - 1|^2 = x^2 - 2x + 1 < |2x + 1|^2 = 4x^2 + 4x + 1$ [1 p.]. Siirtämällä kaikki termit samalle puolelle tämä saadaan muotoon $3x^2 + 6x > 0$ [1 p.]. Ottamalla x yhteiseksi tekijäksi ja jakamalla 3:lla tämä saadaan edelleen muotoon $x(x+2) > 0$ [1 p.]. Polynomin $x(x+2)$ nollakohdat ovat -2 ja 0 [1 p.], ja merkkitarkastelu antaa ratkaisuksi $x < -2$ tai $x > 0$ [1 p.].

3. Nyt

$$F(x) = \int 4x(1 - x^2)\,dx = \int (4x - 4x^3)\,dx = 2x^2 - x^4 + C.$$

[6 p.; vain toinen yhteenlaskettavista on integroitu oikein: 3 p.]* Lisäehto on $F(1) = 3$ [3 p.], josta saadaan $F(1) = 2 - 1 + C = 3$ [1 p.] ja edelleen $C = 2$ [1 p.]. Siis $F(x) = 2x^2 - x^4 + 2$. [1 p.]

Toinen mahdollisuus on integroida suoraan

$$F(x) = \int 4x(1 - x^2)\,dx = -(1 - x^2)^2 + C.$$

[6 p.; integraalifunktiossa pieni virhe (esim. merkkivirhe): 3 p.]† Lisäehto on $F(1) = 3$ [3 p.], josta saadaan $F(1) = 0 + C = 3$ [1 p.] ja edelleen $C = 3$ [1 p.]. Siis $F(x) = 3 - (1 - x^2)^2$ $(= 3 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2 + 2x^2 - x^4)$. [1 p.]

[Kummassakin ratkaisutavassa loppuosan suorituksesta on mahdollista saada oikein suoritettuna 6 pistettä, vaikka integraalifunktion määrittämisessä olisi tapahtunut virhe (edellyttäen, että saatu integraalifunktio on järjellinen ja loppuosa tehdään kyseistä integraalifunktiota käyttäen).]

4. Jos $c \neq -1, 2$, niin

$$l_1\colon\ y = \frac{1}{c+1}x + \frac{3c}{c+1}, \qquad \text{[1 p.]}$$

$$l_2\colon\ y = \frac{c-7}{c-2}x - \frac{5}{c-2}, \qquad \text{[1 p.]}$$

ja kulmakertoimet ovat

$$k_1 = \frac{1}{c+1}, \qquad \text{[1 p.]}$$

$$k_2 = \frac{c-7}{c-2}. \qquad \text{[1 p.]}$$

*Integrointivakio puuttuu : -1 p.

†Integrointivakio puuttuu : -1 p.

Siis suorat ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos

$$\begin{aligned}
k_1 k_2 &= -1 && \text{[1 p.]}\\
\frac{1}{c+1}\cdot\frac{c-7}{c-2} &= -1 && \text{[1 p.]}\\
7-c &= (c+1)(c-2)\\
7-c &= c^2-c-2\\
c^2 &= 9\\
c &= \pm 3. && \text{[2 p. (1 p./ratkaisu)]}
\end{aligned}$$

Jos $c = 2$, niin

$$\begin{aligned}
l_1\colon\ & y = \tfrac{1}{3}x + 2,\\
l_2\colon\ & x = -1.
\end{aligned} \qquad \text{[1 p.]}$$

Silloin l_2 on y-akselin suuntainen, mutta l_1 ei ole x-akselin suuntainen, joten suorat eivät ole kohtisuorassa. [1 p.]

Jos $c = -1$, niin

$$\begin{aligned}
l_1\colon\ & x = 3,\\
l_2\colon\ & y = \tfrac{8}{3}x + \tfrac{5}{3}.
\end{aligned} \qquad \text{[1 p.]}$$

Suorat eivät ole kohtisuorassa. [1 p.]

Toinen tapa: Suuntavektorit ovat

$$\bar{s}_1 = (c+1)\bar{\imath} + \bar{\jmath}, \qquad \bar{s}_2 = (c-2)\bar{\imath} + (c-7)\bar{\jmath}. \qquad \text{[6 p.]}^{\ddagger}$$

Suorat ovat kohtisuorassa silloin ja vain silloin, kun

$$\begin{aligned}
\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 &= 0 && \text{[2 p.]}\\
(c+1)(c-2) + 1(c-7) &= 0 && \text{[2 p.]}\\
c^2 - c - 2 + c - 7 &= 0\\
c^2 &= 9\\
c &= \pm 3. && \text{[2 p. (1 p./ratkaisu)]}
\end{aligned}$$

5. Olkoon A_i $(i = 1, 2)$ tapahtuma, että i. nostettava arpa on voittoarpa, ja $\bar{A}_i$ sen komplementtitapahtuma. Olkoon K nostettavien voittoarpojen lukumäärä. Tällöin

$$P(K=0) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \overset{1)}{=} P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{28}{45},$$

$$P(K=1) \overset{2)}{=} P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9} + \frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9} = 2\cdot\frac{2\cdot 8}{10\cdot 9} = \frac{16}{45},$$

$$P(K=2) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{45},$$

‡Merkkivirhe suuntavektoreissa −1 p./vektori

missä kohdassa 1) on sovellettu yleistä todennäköisyyksien kertolaskusääntöä ja kohdassa 2) erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöä.

Toinen ratkaisu: Käytetään klassisen todennäköisyyden kaavaa $P(A) = n(A)/n(E)$, missä $n(A)$ on suotuisten alkeistapahtumien ja $n(E)$ kaikkien alkeistapahtumien lukumäärä. Määritetään aluksi todennäköisyys, ettei yksikään arpa voita. Kaksi arpaa voidaan valita kaikestaan $\binom{10}{2}$ eri tavalla, joten $n(E) = \binom{10}{2}$. Kaksi voitotonta arpaa voidaan valita $\binom{8}{2}$ eri tavalla, joten $n(A) = \binom{8}{2}$ ja siis

$$P(K = 0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{(8 \cdot 7)/(1 \cdot 2)}{(10 \cdot 9)/(1 \cdot 2)} = \frac{28}{45}.$$

Määritetään seuraavaksi todennäköisyys, että yksi arpa voittaa. Koska yksi voitollinen arpa voidaan valita 2 tavalla ja yksi voitoton 8 tavalla, tuloperiaatteen mukaan $n(A) = 2 \cdot 8$. Saamme

$$P(K = 1) = \frac{2 \cdot 8}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \cdot 8}{(10 \cdot 9)/(1 \cdot 2)} = \frac{16}{45}.$$

Kaksi voitollista arpaa voidaan valita vain yhdellä tavalla, joten

$$P(K = 2) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{(10 \cdot 9)/(1 \cdot 2)} = \frac{1}{45}.$$

Olkoon X nostettettavien arpojen yhteenlaskettu arvo. Sen odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} P(K = k)(10k) = \frac{28}{45} \cdot 0 + \frac{16}{45} \cdot 10 + \frac{1}{45} \cdot 20 = 4.$$

Toinen tapa laskea odotusarvo: Olkoon X_i i:nnen nostettavan arvan arvo. Tällöin $E(X_i) = \frac{8}{10} \cdot 0 + \frac{2}{10} \cdot 10 = 2$, kun $i = 1, 2$. Odotusarvon summakaavan perusteella

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

(Huom. Tämä ratkaisu edellyttää odotusarvon summakaavaa, joka ei kuulune lukiokurssin ydinainekseen.)

Arvosteluohje: Kustakin kolmesta todennäköisyydestä 3 pistettä, samoin odotusarvosta. Oikea kaava 1 p., oikea sijoitus kaavaan 1 p. ja oikea lopputulos 1 p. Kaavan puuttumisesta ei sakoteta, jos laskulauseke on muuten oikein.