

Helsingin, Joensuun, Jyväskylän, Oulun ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe 5.6.2006 klo 14–17

1. Ratkaise, millä reaaliluvuilla x on voimassa

$$\left| \frac{x+3}{x+2} \right| > 1.$$

2. Laske käyrän $y = 1/x$ ja suoran $3x + 3y = 10$ rajaaman rajoitetun alueen pinta-ala.
3. Viisi punaista ja kolme sinistä palloa sisältävästä korista nostetaan umpimähkään kaksi palloa. Laske todennäköisyys, että nostetut pallot ovat
- (a) molemmat punaisia,
 - (b) eriväriset,
 - (c) molemmat punaisia sillä ehdolla, että pallojen tiedetään olevan samanväriset.

Anna vastaukset sievennettyinä murtolukuina.

4. Olkoon suoran ympyräkartion korkeus $H > 0$ ja pohjaympyrän säde $R > 0$. Kartion sisään sijoitetaan toinen suora ympyräkartio ylösalaisin niin, että pienemmän kartion huippu on suuremman kartion pohjaympyrän keskipisteessä ja pienemmän kartion pohjaympyrän kehä on suuremman kartion vaipalla. Määritä pienemmän kartion korkeus h ja pohjaympyrän säde r , kun pienemmän kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Mikä on tällöin pienemmän kartion tilavuuden suhde suuremman kartion tilavuuteen?
5. Tutkitaan kokonaislukukolmikoita (a, b, c) , jotka toteuttavat yhtälön

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2,$$

ja joilla $1 \leq a \leq b \leq c$.

- (a) Osoita, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja, joissa $a = 1$ tai $a \geq 4$.
- (b) Määritä kaikki ratkaisukolmikot (a, b, c) , joissa $a = 2$.
- (c) Määritä kaikki ratkaisukolmikot (a, b, c) , joissa $a = 3$.

Muista b- ja c-kohdissa perustella, miksi ilmoittamiesi lisäksi ei ole muita ratkaisuja.